Análisis de Sistemas Concurrentes Modelados con Redes de Petri Mediante Gramáticas Reguladas

Rubén Monjaraz Hernández-Imbert, José de Jesús Lavalle Martínez
Facultad de Ciencias de la Computación
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
14 sur y Av San Claudio. Edif. 135. Ciudad Universitaria.
Puebla, Pue. 72570. México
Tel. (01222) 229 55 00 ext. 2102 Fax (01222) 229 53 36 e-mail: rmhi@fcfm.buap.mx

RESUMEN

En este trabajo se caracterizan las redes de Petri mediante gramáticas puras reguladas. Para llevar a cabo esta caracterización se asocia un lenguaje formal a las redes de Petri y posteriormente se construye la gramática que lo describe. Mediante una serie de programas escritos en ML se automatizan los procesos de construcción de la gramática antes mencionada y de generación del lenguaje asociado a la red. De esta manera el comportamiento de un sistema concurrente modelado por una red de Petri puede analizarse a través de un lenguaje formal. El presente trabajo es parte del desarrollo hecho en [1].

Palabras clave:
Caracterización, gramáticas reguladas, lenguajes formales, ML, redes de Petri, sistemas concurrentes.

I. INTRODUCCIÓN

Una red de Petri es un modelo matemático utilizado para el análisis de sistemas concurrentes, sistemas de tiempo real, problemas de sincronización, etc. Se puede definir una red de Petri de la siguiente manera [2].

Definición 1
Una **red de Petri** es un sistema $N = (P, T, I, O, \mu_0)$ donde:

- $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ es un conjunto finito, no vacío, cuyos elementos se denominan **lugares**,
- $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ es un conjunto finito, no vacío, cuyos elementos se conocen como **transiciones**,

además se tiene que $P \cap T = \emptyset$,

- I es un mapeo de la forma $I : T \times P \to \mathbf{N}$ que representa la **función de entrada**,
- O es un mapeo definido como $O : T \times P \to \mathbf{N}$ y es llamado la **función de salida**,
- se llama **marca** a la función definida como $\mu : P \to \mathbf{N}$ y representa el número de tokens en algún lugar $p \in P$. En particular cada red de Petri cuenta con la así llamada **marca inicial** μ_0. En algunas ocasiones denotaremos los valores de una marca μ con la tupla $(\mu(p_1), \mu(p_2), \ldots, \mu(p_r))$.

Tal sistema se representa mediante un grafo dirigido, el cual toma $P \cup T$ como conjunto de vértices. Para todo $p \in P$ y $t \in T$, existe un arco que va de p a t, etiquetado por $I(t,p)$, si $I(t,p) > 0$. De igual manera existe un arco etiquetado por $O(t,p)$ que va de t a p si $O(t,p) > 0$.

Definición 2
Sea N una red de Petri y μ una marca de N. Se dice que una transición $t \in T$ está **habilitada** en μ si para cada $p \in P$, se tiene que $\mu(p) \geq I(t,p)$. Si t está habilitada en μ se dice que t puede **disparar**, esto es, puede tomar $I(t,p)$ tokens del lugar p y colocar $O(t,p)$ tokens en el mismo lugar. De esta forma el disparo de una transición provoca un cambio en la marca.

La función de transición δ_N de N se define como

$$\delta_N(\mu, t) = \begin{cases} \mu' & \text{si } t \text{ habilitada en } \mu \text{ y donde} \\ & \mu'(p) = \mu(p) - I(t,p) + O(t,p) \\ & \text{para toda } p \in P, \\ \text{indefinida} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La extensión de T a T^* de esta función se define como

$$\hat{\delta}_N(\mu, \lambda) = \mu,$$
$$\delta_N(\mu, wt) = \delta_N(\delta_N(\mu, w), t), \; t \in T, w \in T^*,$$

para toda marca μ.

J. Díaz de León, G. González, J. Figueroa (Eds.): Avances en Ciencias de la Computación, pp. 107-116, 2003.

Ejemplo Sea $N_1 = (P,T,I,O,\mu_0)$ una red de Petri donde:[1]

$$P = \{p_1,p_2,p_3,p_4\},$$
$$T = \{t_1,t_2,t_3,t_4\},$$
$$\mu_0 = (1,1,0,0),$$

$$\begin{array}{ll} I(t_1,p_1) = 1, & I(t_1,p_2) = 1, \\ I(t_2,p_3) = 1, & I(t_3,p_3) = 1, \\ I(t_4,p_1) = 1, & I(t_4,p_2) = 1, \\ O(t_1,p_3) = 1, & O(t_2,p_2) = 1, \\ O(t_3,p_1) = 1, & O(t_4,p_4) = 1 \end{array}$$

cual se representa en forma gráfica como

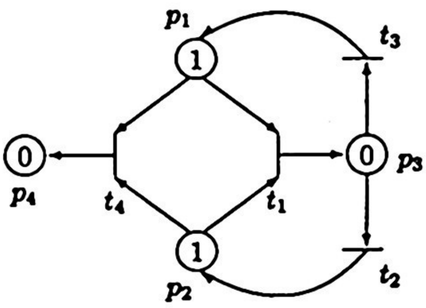

Figura 1: Red de petri N_1.

Las transiciones t_1 y t_4 están habilitadas en μ_0, a diferencia de t_2 y t_3, y por lo tanto tenemos que

$$\delta_{N_1}(\mu_0,t_1) = (0,0,1,0), \qquad \delta_{N_1}(\mu_0,t_4) = (0,0,0,1).$$

En la marca $\delta_{N_1}(\mu_0,t_1)$ las transiciones t_2 y t_3 están ahora habilitadas, mientras que t_1 y t_4 no lo están. La marca $\delta_{N_1}(\mu_0,t_4)$ no tiene transiciones habilitadas. La representación de $\delta_{N_1}(\mu_0,t_1)$ es la siguiente

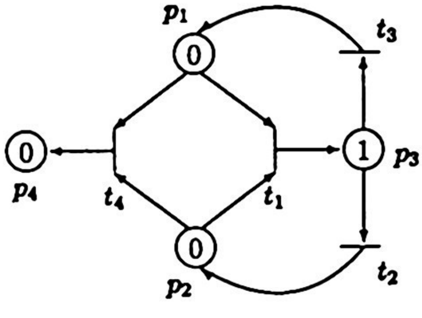

Figura 2: Red de petri N_1 tras el disparo de t_1.

[1] Para simplificar el ejemplo se omiten las combinaciones que resulten en 0 en las funciones, no así en las marcas.

II. MODELADO DE SISTEMAS CONCURRENTES

Como se mencionó anteriormente las redes de Petri sirven para modelar sistemas concurrentes. Un ejemplo típico es el problema de la cena de los filósofos [3]:

Cinco filósofos se sientan a la mesa. Cada uno de ellos tiene un plato de spaghetti. El spaghetti es tan escurridizo que un filósofo necesita dos tenedores para comerlo. Entre cada dos platos hay un tenedor. La vida de un filósofo consta de dos periodos alternados, comer y pensar.

De acuerdo la definición 1 el problema anterior puede modelarse con la siguiente red de Petri [4] $N_f = (P,T,I,O,\mu_0)$:

$$\begin{aligned}
&P = \{tenedor_i,\ f_i.pensando,\ f_i.comiendo\},\\
&T = \{f_i.empieza.comer,\ f_i.empieza.pensar\},\\
&I(f_i.empieza.comer,\ tenedor_i) = 1,\\
&I(f_i.empieza.comer,\ tenedor_j) = 1,\\
&I(f_i.empieza.comer,\ f_i.pensando) = 1,\\
&I(f_i.empieza.pensar,\ f_i.comiendo) = 1,\\
&O(f_i.empieza.comer,\ f_i.comiendo) = 1,\\
&O(f_i.empieza.pensar,\ tenedor_i) = 1,\\
&O(f_i.empieza.pensar,\ tenedor_j) = 1,\\
&O(f_i.empieza.pensar,\ f_i.pensando) = 1,\\
&\mu_0(tenedor_i) = 1,\\
&\mu_0(f_i.comiendo) = 0,\\
&\mu_0(f_i.pensando) = 1,
\end{aligned}$$

donde $1 \le i \le 5$ y $j = (i \bmod 5) + 1$.

III. CARACTERIZACIÓN MEDIANTE GRAMÁTICAS

Definición 3
El siguiente conjunto [2] puede asociarse a alguna red de Petri N:

$$L_r(N) = \{\delta_N(\mu_0,w) :\ w \in T^*\}.$$

Éste contiene todas las marcas las cuales pueden ser alcanzadas a partir de μ_0 mediante el disparo de algunas transiciones.

Siguiendo el ejemplo de la sección 1 se tiene que

$$L_r(N_1) = \{(0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\},$$

y para el problema de los filósofos

$$
\begin{aligned}
L_r(N_f) = \{&(0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0),\\
&(1,1,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,1,1,0),\\
&(1,1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0),\\
&(1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0),\\
&(0,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0,1),\\
&(0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0),\\
&(0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0),\\
&(1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1,0,1,0),\\
&(0,1,0,0,0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1),\\
&(0,1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,1),\\
&(1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0)\}.
\end{aligned}
$$

Definición 4

Sea N una red de Petri y $L_r(N)$ el conjunto de marcas alcanzables desde μ_0. Dada una marca $\mu : P \to$ **N** se asocia a ella la palabra

$$a_1^{\mu(p_1)} A_1 a_2^{\mu(p_2)} A_2 \ldots a_r^{\mu(p_r)} A_r$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_r$ es un ordenamiento fijo de P. De esta manera cada subcadena de la forma $a_i^{\mu(p_i)}$ representa el número de tokens en el lugar p_i. Las subcadenas de la forma A_i sirven como separadores. De esta forma se define el lenguaje

$$
\begin{aligned}
L_r'(N) = \{&a_1^{\mu(p_1)} A_1 a_2^{\mu(p_2)} A_2 \ldots a_r^{\mu(p_r)} A_r :\\
&\mu = \delta_N(\mu_0, w) \text{ para alguna } w \in T^*\}
\end{aligned}
$$

sobre el alfabeto $\{a_1, a_2, \ldots, a_r, A_1, A_2, \ldots, A_r\}$.

Este lenguaje puede describirse en términos de una gramática pura matricial [2] de la siguiente manera.

Definición 5

Sea $N = (P, T, I, O, \mu_0)$ una red de Petri, donde $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_s\}$ y $\mu_0 = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$. Se asocia a N la gramática pura matricial $G = (V, M, W)$, donde

$$
\begin{aligned}
V &= \{a_1, a_2, \ldots, a_r, A_1, A_2, \ldots, A_r\},\\
W &= \{a_1^{n_1} A_1 a_2^{n_2} A_2 \ldots a_r^{n_r} A_r\}.
\end{aligned}
$$

A cada transición $t_i \in T$, $1 \le i \le s$, se asocia la matriz

$$
\begin{aligned}
m_i : (&[a_1 \to \lambda]^{k_1},\ [a_2 \to \lambda]^{k_2}, \ldots, [a_r \to \lambda]^{k_r},\\
&A_1 \to a_1^{u_1} A_1,\ A_2 \to a_2^{u_2} A_2, \ldots, A_r \to a_r^{u_r} A_r)
\end{aligned}
$$

donde $k_j = I(t_i, p_i)$ y $u_j = O(t_i, p_j)$ para $1 \le j \le r$. Sea M el conjunto de todas estas matrices. Cada matriz m_i es aplicable sólo a palabras de la forma

$$v = a_1^{v_1} A_1 a_2^{v_2} A_2 \ldots a_r^{v_r} A_r$$

donde $v_j \ge k_j = I(t_i, p_j), 1 \le j \le r$, o en otras palabras, la matriz m_i es aplicable a la palabra v si y sólo si la transición t_i está habilitada en la correspondiente marca $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$. Dicha aplicación da como resultado la palabra

$$v \underset{m_i}{\Rightarrow} z = a_1^{z_1} A_1 a_2^{z_2} A_2 \ldots a_r^{z_r} A_r$$

si y sólo si

$$\delta_N((v_1, v_2, \ldots, v_r), t_i) = (z_1, z_2, \ldots, z_r).$$

De esta forma, dada una marca $\mu = \delta_N(\mu_0, w)$ producida por N, la gramática G es capaz de generar la correspondiente palabra $a_1^{\mu(p_1)} A_1 a_2^{\mu(p_2)} A_2 \ldots a_r^{\mu(p_r)} A_r$. Por otro lado, dada una palabra generada por G, como la anterior, podemos hallar su correspondiente marca μ, producida por N. Por lo anterior puede verse que

$$L_r'(N) = L(G).$$

Siguiendo el problema de los filósofos, la gramática $G = (V, M, W)$ asociada a N_f es:

$$
\begin{aligned}
&V = \{a_i, A_i :\ 1 \le i \le 15\},\\
&W = \{a_1 A_1 a_2 A_2 A_3 a_4 A_4 a_5 A_5 A_6 a_7 A_7 a_8 A_8 A_9 \setminus\\
&\qquad a_{10} A_{10} a_{11} A_{11} A_{12} a_{13} A_{13} a_{14} A_{14} A_{15}\},\\
&M = \{\\
&m_1 : (a_1 \to \lambda, a_2 \to \lambda, A_3 \to a_3 A_3, a_4 \to \lambda),\\
&m_2 : (A_1 \to a_1 A_1, A_2 \to a_2 A_2, a_3 \to \lambda, A_4 \to a_4 A_4)\\
&m_3 : (a_4 \to \lambda, a_5 \to \lambda, A_6 \to a_6 A_6, a_7 \to \lambda),\\
&m_4 : (A_4 \to a_4 A_4, A_5 \to a_5 A_5, a_6 \to \lambda, A_7 \to a_7 A_7)\\
&m_5 : (a_7 \to \lambda, a_8 \to \lambda, A_9 \to a_9 A_9, a_{10} \to \lambda),\\
&m_6 : (A_7 \to a_7 A_7, A_8 \to a_8 A_8, a_9 \to \lambda, A_{10} \to a_{10} A_{10})\\
&m_7 : (a_{10} \to \lambda, a_{11} \to \lambda, A_{12} \to a_{12} A_{12}, a_{13} \to \lambda),\\
&m_8 : (A_{10} \to a_{10} A_{10}, A_{11} \to a_{11} A_{11}, a_{12} \to \lambda,\\
&\qquad A_{13} \to a_{13} A_{13})\\
&m_9 : (a_1 \to \lambda, a_{13} \to \lambda, A_{14} \to a_{14} A_{14}, a_{15} \to \lambda),\\
&m_{10} : (A_1 \to a_1 A_1, A_{13} \to a_{13} A_{13}, a_{14} \to \lambda,\\
&\qquad A_{15} \to a_{15} A_{15})\\
&\}
\end{aligned}
$$

y el lenguaje asociado $L_r'(N_f)$ es

$$
\begin{aligned}
&\{\\
&A_1 A_2 a_3 A_3 A_4 a_5 A_5 A_6 a_7 A_7 \setminus\\
&a_8 A_8 A_9 a_{10} A_{10} a_{11} A_{11} A_{12} a_{13} A_{13} a_{14} A_{14} A_{15},\\
&a_1 A_1 a_2 A_2 A_3 A_4 A_5 a_6 A_6 A_7 \setminus\\
&a_8 A_8 A_9 a_{10} A_{10} a_{11} A_{11} A_{12} a_{13} A_{13} a_{14} A_{14} A_{15},\\
&a_1 A_1 a_2 A_2 A_3 a_4 A_4 a_5 A_5 A_6 A_7 \setminus\\
&A_8 a_9 A_9 A_{10} a_{11} A_{11} A_{12} a_{13} A_{13} a_{14} A_{14} A_{15},
\end{aligned}
$$

$$a_1A_1a_2A_2A_3a_4A_4a_5A_5A_6a_7A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9A_{10}A_{11}a_{12}A_{12}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15},$$
$$A_1a_2A_2A_3a_4A_4a_5A_5A_6a_7A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9a_{10}A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}a_{15}A_{15},$$
$$A_1A_2a_3A_3A_4a_5A_5A_6A_7\backslash$$
$$A_8a_9A_9A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}a_{13}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15},$$
$$A_1A_2a_3A_3A_4a_5A_5A_6a_7A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9A_{10}A_{11}a_{12}A_{12}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15},$$
$$a_1A_1a_2A_2A_3A_4A_5a_6A_6A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9A_{10}A_{11}a_{12}A_{12}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15},$$
$$A_1a_2A_2A_3A_4A_5a_6A_6A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9a_{10}A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}a_{15}A_{15},$$
$$A_1a_2A_2A_3a_4A_4a_5A_5A_6A_7\backslash$$
$$A_8a_9A_9A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}A_{13}A_{14}a_{15}A_{15},$$
$$a_1A_1a_2A_2A_3a_4A_4a_5A_5A_6a_7A_7\backslash$$
$$a_8A_8A_9a_{10}A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}a_{13}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15}$$
$$\}.$$

Para facilitar la lectura del resultado anterior se puede proceder de la siguiente manera. Dado una palabra en $L'_r(N_f)$ reemplazar los símbolos de la forma a_i, que en este ejemplo tienen a los más una ocurrencia, por el nombre del lugar correspondiente y reemplazar también los separadores A_i por el símbolo '$-$'. Por ejemplo, dada la palabra correspondiente a la marca inicial

$$a_1A_1a_2A_2A_3a_4A_4a_5A_5A_6a_7A_7a_8A_8A_9\ \backslash$$
$$a_{10}A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}a_{13}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15}$$

se tendría la palabra

$$tenedor_1 - f_1.pensando - -\backslash$$
$$tenedor_2 - f_2.pensando - -\backslash$$
$$tenedor_3 - f_3.pensando - -\backslash$$
$$tenedor_4 - f_4.pensando - -\backslash$$
$$tenedor_5 - f_5.pensando - -$$

la cual refleja la configuración inicial del problema de los filósofos: los cinco tenedores están disponibles y los cinco filósofos están pensando.

IV. ANÁLISIS

Uno de los problemas más importantes en el análisis de los sistemas concurrentes es la detección de **bloqueos**. En el ámbito de las redes de Petri, puede entenderse un bloqueo como una configuración (o marca) en la cual ninguna transición de la red puede disparar.

Detectar un bloqueo en un sistema modelado a través de una red de Petri equivale a establecer si la configuración que lo genera puede ser alcanzada a partir de la marca inicial mediante el disparo algunas transiciones. Ya que una red de Petri puede caracterizarse mediante una gramática, la detección se reduce a establecer si la palabra correspondiente a marca que genera el bloqueo puede ser generada la gramática en cuestión. Dicho de otra manera, debe verificarse si la palabra deseada está o no contenida el lenguaje L'_r.

En el problema de la cena de los filósofos una situación que conduce a un bloqueo es aquella en la todos los filósofos tienen el tenedor a su derecha (o todos tienen el tenedor a su izquierda) cuando están el estado pensando, lo cual provoca que ninguno pueda cambiar al estado comiendo. La marca que refleja dicha condición es

$$(0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0)$$

cuya palabra equivalente es

$$A_1a_2A_2A_3A_4a_5A_5A_6A_7a_8A_8A_9\backslash$$
$$A_{10}a_{11}A_{11}A_{12}A_{13}a_{14}A_{14}A_{15}$$

o en una forma más cómoda

$$-f_1.pensando - -\backslash$$
$$-f_2.pensando - -\backslash$$
$$-f_3.pensando - -\backslash$$
$$-f_4.pensando - -\backslash$$
$$-f_5.pensando - -.$$

Puede observarse que dicha palabra no pertenece $L'_r(N_f)$.

REFERENCIAS

[1] R. Monjaraz. *Caracterización de los Sistemas Reescritura Regulada mediante Autómatas.* de Licenciatura, Facultad de Ciencias de la Computación, B.U.A.P., Puebla, México, 2003.

[2] G. Păun; J. Dassow. *Regulated rewriting in Formal Language Theory.* Akademie-Verlag Berlin, 1989.

[3] A. S. Tanenbaum. *Sistemas Operativos.* Prentice Hall, 1991.

[4] P. Arriaga. *Redes de Petri para la Especificación Formal de Sistemas Concurrentes.* Tesis de ciatura, Facultad de Ciencias de la Computación, B.U.A.P., Puebla, México, 1999.